TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Annika Heinonen

Newtonin, Riemannin ja Henstock-Kurzweilin integraalit

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Helmikuu 2013

Sisältö

Tampereen yliopisto

Informaatiotieteiden yksikkö

HEINONEN, ANNIKA: Newtonin, Riemannin ja Henstock-Kurzweilin integraalit

Pro gradu -tutkielma, 27 s.

Matematiikka

Helmikuu 2013

Tiivistelmä

Tutkielman tarkoituksena on perehdyttää lukija Newtonin, Riemannin ja Henstock-Kurzweilin integraaleihin. Erityisesti tarkastellaan Newtonin integraalin ominaisuuksia sekä yhtäläisyyttä Riemannin ja Henstock-Kurzweilin integraaleihin. Luvussa 2 esitellään Newtonin integraalin määritelmä sekä Newton-integroituvien funktioiden ominaisuuksia. Lisäksi esitellään Newtonin integraalin erilaisia variaatioita, joita ovat klassinen, naiivi, elementaarinen, muunneltu sekä kontrolloitu versio. Luvussa 3 perehdytään Riemannin summaan ja integraaliin sekä esitellään approksimaatiomenetelmä, jolla Riemannin summa ja Newtonin integraali ovat likimain samat. Luvussa 4 esitellään Henstock-Kurzweilin integraali, joka on kytkettävissä luvussa 3 esiteltyyn Riemannin integraalin määritelmään. Lopuksi osoitetaan, että Newtonin integraalin kontrolloitu versio ja Henstock-Kurzweilin integraali ovat ekvivalentteja.

1 Johdanto

Tutkielmassa perehdytään Newtonin, Riemannin ja Henstock-Kurzweilin integraaleihin aloittamalla luvussa 2.1 klassisen Newtonin integraalin määritelmästä. Luvussa 2.2 tarkastellaan erilaisia Newton-integroituvia funktioita sekä antiderivaattojen F funktioita. Kun tarkastellaan rajoitettuja integroituvia funktioita, niin antiderivaatta F on Lipschitzin funktio ja Lipschitzin funktiot muodostavat funktioluokan. Luvussa 2.3 keskitytään jatkuviin Newton-integroituviin funktioihin esittelemällä yläfunktiomenetelmä. Yläfunktiot muodostavat funktioluokan, jonka avulla voidaan arvioida funktion antiderivaattaa. Luvussa 2.4 esitellään Newtonin integraalin erilaisia variaatioita. Tällöin funktion f sallitaan käyttäytyvän poikkeavasti joissakin pisteissä eikä se täten ole integroituva tavallisessa mielessä. Tällaisia Newtonin integraalin variaatioita klassisen version lisäksi ovat naiivi, elementaarinen, muunneltu sekä kontrolloitu.

Luvussa 3 perehdytään Riemannin integraaliin esittelemällä määritelmä luvussa 3.1 Riemannin summalle. Lisäksi tarkastellaan Newtonin integraalin ja Riemannin summan yhteyttä. Sopivalla approksimaatiolla näiden arvot ovat likimain samat. Luvussa 3.2 esitellään määritelmä Riemannin integraalille.

Luvussa 4 perehdytään Henstock-Kurzweilin integraaliin. Luvussa 4.1 esitellään Henstock-Kurzweilin integraalin määritelmä, joka pohjautuu luvussa 3.2 esiteltyyn Riemannin integraalin määritelmään. Lopuksi luvussa 4.2 tarkastellaan Newtonin ja Henstock-Kurzweilin integraalin yhteyttä todistamalla, että Newtonin integraalin kontrolloitu versio on ekvivalentti Henstock-Kurzweilin integraalin kanssa.

Tutkielmassa lukijalta edellytetään hyvää integraalilaskennan hallitsemista esimerkiksi yliopiston analyysin kurssien pohjalta. Tutkielman päälähteenä käytetään verkkojulkaisua Thomson, B., Theory of the integral. Lisäksi lähteinä käytetään Tom Apostolin teosta *Mathematical Analysis*, Kurtz Douglasin ja Swartz Charlesin teosta *Theories of Integration* sekä Brian Thomsonin, Judith Brucknerin ja Andrew Brucknerin teosta *Real Analysis*.

2 Newtonin integraali

Isaac Newton (1642-1727) oli englantilainen matemaatikko, fyysikko ja tähtitieteilijä. Yliopistossa hän opiskeli matematiikkaa, fysiikkaa, kreikkaa ja latinaa. Jo ensimmäisenä neljänä yliopistovuotena hän kehitti hyvin pitkälle differentiaali- ja integraalilaskentaa. Sen ansioista hän pystyi määrittämään säännöllisen käyrän tangentin ja kaarevuuden käyrän mielivaltaisessa pisteessä. Häntä voidaan pitää yhtenä integraalilaskennan kehittäjänä. Newton osoitti 1600-luvun lopulla, että pinta-alojen ongelmat ovat ratkaistavissa antiderivaatan avulla. Näin hän kehitti pohjan integraalilaskennalle, jonka kehittämistä useat henkilöt ovat jatkaneet. Matematiikan lisäksi hän on kehittänyt tärkeää pohjaa myös fysiikan eri osa-alueilla. (Ks. [3, s. 67-71].)

2.1 Klassinen Newtonin integraali

Esitellään aluksi Newtonin integraalin klassinen määritelmä (ks. [4, s. 2]).

Määritelmä 2.1. Olkoon funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ määritelty suljetulla välillä $[a,b]$. Tällöin funktio f on *Newton-integroituva* välillä $[a,b]$, jos on olemassa funktio $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ siten, että $F'(x) = f(x)$ jokaisella $x \in [a,b]$.[1] Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Yleensä funktiota F sanotaan funktion f *antiderivaataksi*. Funktiolla f on olemassa useita mahdollisia antiderivaattoja F, joten määritelmä 1 edellyttää, että määrätty integraali $F(b) - F(a)$ ei ole riippuvainen valitusta funktiosta F. Tämä voidaan osoittaa yksinkertaisimmin käyttämällä väliarvolausetta. Määritelmä 2.1 on deskriptiivinen, koska sen avulla ei voida rakentaa tai etsiä integraalia. Ainoastaan jos funktiolla f tiedetään olevan antiderivaatta, niin integraalin arvo voidaan määrittää.

2.2 Newton-integroituvat funktiot

Tarkastellaan aluksi funktion f antiderivaattojen funktioita F. Oletetaan, että funktio f on määritelty välillä $[a,b]$. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt \quad (a \leq x \leq b),$$

[1] Täsmällisesti ottaen $F'(a) = f(a)$ on vasemmanpuoleinen ja $F'(b) = f(b)$ oikeanpuoleinen derivaatta.

jos ja vain jos funktio F on derivoituva välillä $[a,b]$ ja $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in [a,b]$. Tällöin F on funktion f antiderivaatta välillä $[a,b]$.

Kun rajataan edellistä tarkastelua olettamalla funktion f olevan rajoitettu välillä $[a,b]$, niin päästään seuraavaan tärkeään funktioluokkaan, Lipschitzin funktioihin (ks. [4, s. 3]).

Määritelmä 2.2. Funktiota $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sanotaan *Lipschitzin funktioksi*, jos on olemassa ei-negatiivinen luku M siten, että

$$|F(y) - F(x)| \leq M|y - x|$$

kaikilla $x, y \in [a,b]$.

Esitellään seuraavaksi lause koskien Lipschitzin funktioita. Jos lauseen ehdot toteutuvat, niin antiderivaatta F on Lipschitzin funktio.

Lause 2.1. *Jos funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on rajoitettu ja integroituva, niin sen antiderivaatta on Lipschitzin funktio.*

Todistus. (Vrt. [4, s. 3, Lause 1.3].) Olkoon funktio F funktion f antiderivaatta. Olkoon lisäksi funktio f rajoitettu jollakin ei-negatiivisella luvulla M siten, että

$$|f(x)| \leq M$$

kaikilla $x \in [a,b]$. Oletetaan, että $y \in [a,b]$. Väliarvolauseesta seuraa, että on olemassa jokin piste ξ siten, että $\xi \in [x,y]$. Tällöin

$$\left|\frac{F(y) - F(x)}{y - x}\right| = |F'(\xi)| \leq M \qquad (x \neq y)$$

kaikilla $x, y \in [a,b]$. Koska F on funktion f antiderivaatta, niin saadaan

$$|F'(\xi)| = |f(\xi)|,$$

josta oletuksen perusteella edelleen

$$\left|\frac{F(y) - F(x)}{y - x}\right| = |f(\xi)| \leq M,$$

kun $\xi \in [a,b]$. $\square$

Ennen itseisesti integroituvien funktioiden lauseen esittämistä määritellään *jaon* käsite.

Määritelmä 2.3. (Ks. [1, s. 128, Määritelmä 6.3].) Jos väli $[a, b]$ on suljettu ja joukon

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

pisteiden joukko noudattaa ehtoa

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

niin joukon P sanotaan olevan välin $[a, b]$ *jako.* Väliä $[x_{i-1}, x_i]$ sanotaan jaon P *osaväliksi*, joka voidaan kirjoittaa muotoon $\triangle\, x_i = x_i - x_{i-1}$ siten, että

$$\sum_{i=1}^{n} \triangle\, x_i = b - a.$$

Merkintä $\mathcal{P}[a, b]$ tarkoittaa välin $[a, b]$ kaikkien mahdollisten jakojen kokoelmaa.

Määritellään myös myöhemmin tarvittava *hienompi*-jaon käsite (ks. [4, s. 11]). Olkoon δ positiviinen luku. Tällöin jaon, jota merkitään

$$\{([a_i, b_i], \xi_i)\colon i = 1, 2, 3, \ldots, n\},$$

sanotaan olevan *hienompi* kuin δ, jos jokaisella

$$b_i - a_i < \delta.$$

Yleisemmin, jos δ on jokin positiivinen funktio, niin käytetään vastaavasti edellistä lauseketta vaatien, että jokaisella

$$b_i - a_i < \delta(\xi_i).$$

Funktio $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on *itseisesti integroituva*, jos molemmat funktiot f ja $|f|$ ovat integroituvia. Vastaavasti funktio on *ehdollisesti integroituva*, jos funktio f on integroituva, mutta funktio $|f|$ ei ole integroituva. Esitellään seuraavaksi itseisesti integroituvan funktion lause (ks. [4, s. 4]).

Lause 2.2. *Jos funktio $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on itseisesti integroituva, niin sen antiderivaatalla F on seuraava ominaisuus: kaikilla välin $[a, b]$ jaoilla*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

on voimassa

$$\sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt < \infty.$$

Todistus. Sivuutetaan, ks. [4, s. 4, Lause 1.4]. □

Huomautus 2.1. Lauseen 2.2 ominaisuus ei ole yksinomaan voimassa klassiselle Newtonin integraalille vaan vastaavalla todistuksella ominaisuus on johdettavissa myös muille myöhemmin esitettäville integraaleille.

Millä tahansa funktiolla F, joka noudattaa lausetta 2.2, on *rajoitettu variaatio* välillä $[a, b]$. Määritellään seuraavaksi rajoitetun variaation käsite.

Määritelmä 2.4. (Ks. [1, s. 128, Määritelmä 6.4] ja [5, s. 65-66].) Olkoon funktio F määritelty välillä $[a, b]$. Jos joukko $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ on välin $[a, b]$ jako, niin voidaan kirjoittaa $\triangle F_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$, kun $i = 1, 2, \ldots, n$. Olkoon

$$\mathrm{Var}(F, P) = \sum_{i=1}^{n} |\triangle F_i|.$$

Tällöin funktion F *variaatiota* välillä $[a, b]$ merkitään

$$\mathrm{Var}(F, [a, b]) = \sup\{\mathrm{Var}(F, P) \colon P \text{ on välin } [a, b] \text{ jako}\}.$$

Jos $\mathrm{Var}(F, [a, b])$ on äärellinen, niin funktiolla F on *rajoitettu variaatio* välillä $[a, b]$.

Seuraava esimerkki tarkastelee rajoitetun variaation ominaisuutta.

Esimerkki 2.1. Osoitetaan, että funktiolla $F \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, joka on Lipschitzin funktio, on rajoitettu variaatio välillä $[a, b]$.

Todistus. (Vrt. [4, s. 319, Harjoitus 1].) Koska funktio $F \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on Lipschitzin funktio, niin määritelmän 2.2 perusteella on olemassa ei-negatiivinen luku M siten, että

$$|F(y) - F(x)| \leq M|y - x|$$

kaikilla $x, y \in [a, b]$. Olkoon joukko $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ välin $[a, b]$ jako. Tällöin määritelmän 2.4 nojalla

$$\mathrm{Var}(F, [a, b]) = \sup\{\mathrm{Var}(F, P) \colon P \text{ on välin } [a, b] \text{ jako}\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |F(x_k) - F(x_{k-1})| = |F(b) - F(a)| \leq M|b - a|.$$

Koska $M|b - a|$ on äärellinen, niin määritelmän 2.4 nojalla funktiolla F on rajoitettu variaatio välillä $[a, b]$. □

Huomautus 2.2. Newton-integroituvat funktiot on kytketty tähän mennessä itseisesti integroituviin funktiohin, mutta on olemassa myös funktioita, jotka ovat ehdollisesti Newton-integroituvia.

Käydään seuraavaksi läpi esimerkki (ks. [4, s. 5]) ehdollisesti Newton-integroituvasta funktiosta.

Esimerkki 2.2. Tarkastellaan funktiota $F(x) = x^2\sin(x^{-2})$ välillä $[0, 1]$. Voidaan tehdä johtopäätös, kun $F(0) = 0$, niin funktio F on jatkuva. Itse asiassa funktio F on jatkuva ja derivoituva jokaisessa välin $[0, 1]$ pisteessä. Erotusosamäärän raja-arvona saadaan, että $F'(0) = 0$. Derivoidaan funktio ja saadaan

$$F'(x) = 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos\frac{1}{x^2}, \qquad (\text{kun } x \neq 0).$$

Määritelmän 2.1 nojalla F' on integroituva välillä $[0, 1]$. Tarkastellaan seuraavaksi funktion $|F'|$ integroituvuutta. Jos funktio $|F'|$ on integroituva, niin lauseen 2.2 nojalla funktiolla F on rajoitettu variaatio välillä $[0, 1]$. Valitaan pisteet

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \quad \text{ja} \quad x_k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{[2k+1]\pi}},$$

kun $k = 1, 2, \ldots$.
Tällöin funktion F arvoiksi saadaan

$$F(y_k) = 0 \quad \text{ja} \quad F(x_k) = \pm\frac{2}{[2k+1]\pi},$$

kun $k = 1, 2, \ldots$.
Nyt millä tahansa positiivisella kokonaisluvulla N saadaan epäyhtälö

$$\sum_{k=1}^{N} |F(y_k) - F(x_k)| \geq \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{[2k+1]\pi}.$$

Oikeanpuoleisen summan arvo kasvaa rajatta, kun N kasvaa. Tällöin

$$\mathrm{Var}(F, [0, 1]) = \infty$$

eikä funktiolla F ole rajoitettua variaatiota. Siis $|F'|$ ei ole integroituva.

2.3 Jatkuvuus ja Newton-integroituvuus

Newton-integroituvista funktioista on olemassa lukuisia esimerkkejä niin jatkuvia kuin epäjatkuvia funktioita. Rajataan tarkastelua keskittymällä jatkuviin funktioihin. Esitellään seuraavaksi *yläfunktion* käsite (ks. [4, s. 6]).

Olkoon f rajoitettu ja määritelty suljetulla välillä $[a, b]$. Olkoon välin $[a, b]$ jako

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Oletetaan, että funktio F on jatkuva välillä $[a, b]$ ja lineaarinen jokaisella välillä $[x_{i-1}, x_i]$ siten, että

$$\frac{F(x_i) - F(x_{i-i})}{x_i - x_{i-1}} \geq f(\xi) \tag{2.1}$$

kaikilla pisteillä ξ, joille $x_{i-1} \leq \xi \leq x_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Tällöin sanotaan, että funktio F on funktion f *yläfunktio* välillä $[a, b]$.

Yläfunktiomenetelmällä voidaan arvioida funktion f antiderivaattaa. Kutakin arvioitavaa funktiota varten tarvitaan omat yläfunktiot, jotka muodostavat funktioluokan. Seuraava esimerkki tarkastelee tarkemmin yläfunktion käsitettä.

Esimerkki 2.3. (Vrt. [4, s. 319, Harjoitus 2].) Olkoon funktio $f(x) = x^2$ määritelty välillä $[0, 1]$. Määritellään funktiolle f yläfunktio käyttämällä pisteitä $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$.

Todistus. Funktio $f(x) = x^2$ on määritelty välillä $[0, 1]$. Tällöin funktion maksimiarvoiksi väleillä $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ ja $[\frac{3}{4}, 1]$ saadaan

$$f\Big(\frac{1}{4}\Big) = \frac{1}{16},\ f\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{4},\ f\Big(\frac{3}{4}\Big) = \frac{9}{16} \text{ ja } f(1) = 1.$$

Käytetään seuraavaksi yläfunktiomenetelmää (2.1) arvioimaan jokaisen välin antiderivaattaa F. Välin $[0, \frac{1}{4}]$ antiderivaataksi $F(x_1)$ saadaan

$$F(x_i) - F(x_{i-i}) \geq f(\xi)(x_i - x_{i-1}),$$

josta edelleen

$$F(x_1) - F(x_0) \geq f\Big(\frac{1}{4}\Big)(x_1 - x_0),$$

jolloin

$$F(x_1) \geq \frac{x_1}{16}.$$

Välin $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ antiderivaataksi $F(x_2)$ saadaan

$$F(x_2) - F(x_1) \geq f\Big(\frac{1}{2}\Big)(x_2 - x_1),$$

josta edelleen

$$F(x_2) - \frac{1}{64} \geq f\Big(\frac{1}{16}\Big)(x_2 - \frac{1}{4}),$$

jolloin

$$F(x_2) \geq \frac{1}{64} + \frac{1}{4}(x_2 - \frac{1}{4}).$$

Vastaavalla tavalla välin $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ antiderivaataksi $F(x_3)$ saadaan

$$F(x_3) \geq \frac{5}{64} + \frac{9}{16}(x_3 - \frac{1}{2})$$

ja välin $[\frac{3}{4}, 1]$ antiderivaataksi $F(x_4)$ saadaan

$$F(x_4) \geq \frac{14}{64} + (x_4 - \frac{3}{4})$$

Kun yhdistetään saadut osavälit, niin saadaan paloittain jatkuva funktio, jonka käyrä jokaisessa segmentissä ylittää funktion f arvon. Muodostunut funktio

$$F(x) \geq \begin{cases} \frac{1}{32}, & \text{kun } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{5}{64}, & \text{kun } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{7}{32}, & \text{kun } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ \frac{15}{32}, & \text{kun } \frac{3}{4} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

on funktion f eräs yläfunktio. □

Jatkuville funktioille voidaan aina määrittää antiderivaatta F. Seuraava lause käsittelee tätä ominaisuutta tarkemmin.

Lause 2.3. *Olkoon funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Tällöin on olemassa sellainen Lipschitzin funktio $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, että $F'(x) = f(x)$ jokaisessa pisteessä $a \leq x \leq b$, jossa funktio f on jatkuva.*

Todistus. (Ks. [4, s. 7-9, Lause 1.5].) Tarkastellaan aluksi tapausta olettamalla, että funktio $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ on ei-negatiivinen ja rajoitettu. Käytetään yläfunktiomenetelmää, ja siksi oletetaan, että funktio F_0 on jatkuva välillä $[0,1]$. Olkoon $F_0(0) = 0$ ja funktiolla on suora, jonka kulmakerroin on supremum seuraavasti

$$c_{01} = \sup\{f(t)\colon 0 \leq t \leq 1\}.$$

Jaetaan väli $[0,1]$ väleihin $[0, \frac{1}{2}]$ ja $[\frac{1}{2}, 1]$. Olkoon funktio F_1 jatkuva välillä $[0,1]$ ja $F_0(0) = 0$ sekä funktiolla F_1 on välillä $[0, \frac{1}{2}]$ suora, jonka kulmakerroin on supremum seuraavasti

$$c_{11} = \sup\{f(t)\colon 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\}$$

ja funktiolla on välillä $[\frac{1}{2}, 1]$ suora, jonka supremum on

$$c_{12} = \sup\{f(t) \colon \frac{1}{2} \leq t \leq 1\}.$$

Väli $[0, 1]$ voidaan jakaa useampiin osaväleihin (ks. [4, s. 8]). Saaduista antiderivaatoista voidaan muodostaa funktiojono $\{F_n\}$. Tällöin jokainen funktio F_n on jatkuva ja kasvava. Yläfunktioiden määrittelystä seuraa, että

$$F_n(x) \geq F_{n+1}(x)$$

kaikilla $0 \leq x \leq 1$ ja $n = 0, 1, 2, \ldots$. Tällöin $\{F_n(x)\}$ on vähenevä jono ei-negatiivisia lukuja ja

$$F(x) = \lim_{n \to \infty} F_n(x)$$

on olemassa kaikilla $0 \leq x \leq 1$.

Osoitetaan, että ehto $F'(x) = f(x)$ on voimassa kaikilla pisteillä $x \in [0, 1]$, jolloin funktion f on oltava jatkuva. Kiinnitetään jokin piste $x \in [0, 1]$ ja olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin argumentti viittaa tapaukseen, jossa $0 < x < 1$. Jos $x = 0$ tai $x = 1$, niin toispuoleinen argumentointi tulee käsitellä vaikka yksityiskohdat eivät erityisesti poikkea toisistaan. Valitaan jokin $\delta > 0$ siten, että funktion f oskillaatio on

$$\omega_f([x - 2\delta, x + 2\delta])$$

välillä $[x - 2\delta, x + 2\delta] \subseteq [0, 1]$ ja se ei ylitä lukua ε. Olkoon h vakio siten, että $0 < h < \delta$. Valitaan jokin kokonaisluku N riittävän suureksi siten, että

$$|F_N(x) - F(x)| < \varepsilon h \text{ ja } |F_N(x + h) - F(x + h)| < \varepsilon h.$$

Nyt yläfunktion määrittelystä seuraa, että saadaan epäyhtälö

$$|F_N(x + h) - F_N(x) - f(x)h| \leq h\omega_f([x - 2h, x + 2h]),$$

joka toteutuu riittävän suurella kokonaisluvulla N. Yhdistetään epäyhtälöt ja saadaan

$$|F(x + h) - F(x) - f(x)h| \leq |F_N(x + h) - F_N(x) - f(x)h|$$

$$+|F_N(x) - F(x)| + |F_N(x + h) - F(x + h)| < 3\varepsilon h.$$

Tästä seuraa, että funktion F oikeanpuoleinen derivaatta pisteessä x on tarkalleen $f(x)$. Vastaavanlainen argumentti osoittaa vasemmanpuoleisen derivaatan olemassaolon. Tällöin funktiolla f on antiderivaatta F välillä $[a, b]$.

Osoitetaan seuraavaksi, että funktio F, joka on määritelty välillä $[0,1]$, on Lipschitzin funktio. Olkoon luku M ei-negatiivinen ja funktion f yläraja. Yläfunktion määritelmästä seuraa, että

$$0 \leq F_n(y) - F_n(x) \leq M(y-x)$$

kaikilla $x < y$ ja $x, y \in [0,1]$. Tästä voidaan suoraan päätellä, että funktio F on Lipschitzin funktio välillä $[0,1]$. Tähän mennessä on osoitettu väite paikkansa pitäväksi välillä $[0,1]$. Nyt luovutaan ei-negatiivisuudesta ja osoitetaan, että väite on yleisesti voimassa välillä $[a,b]$.

Olkoon funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ja funktio

$$g(t) = f(a + t(b-a))$$

kaikilla $0 \leq t \leq 1$. Olkoon G funktion g antiderivaatta välillä $[0,1]$. Osoitetaan, että funktiolla f on olemassa antiderivaatta. Muodostetaan funktio

$$H(x) = (b-a)G\left(\frac{x-a}{b-a}\right),$$

jonka derivaataksi saadaan

$$H'(x) = G'\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

Sijoitetaan $x = (a + t(b-a))$ ja saadaan

$$H'(x) = G'\left(\frac{t(b-a)}{b-a}\right) = G'(t)$$

Koska oletuksen perusteella $G' = g$, niin

$$H'(x) = G'(t) = g(t) = f(a + t(b-a)) = f(x).$$

Siis funktiolla f on olemassa antiderivaatta H.

Oletetaan, että $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on rajoitettu funktio ja

$$K = \inf\{f(x)\colon a \leq x \leq b\}.$$

Olkoon $g(t) = f(t) - K$ kaikilla $a < t < b$. Tällöin g on rajoitettu ja ei-negatiivinen välillä $[a,b]$. Oletetaan, että G on funktion g antiderivaatta välillä $[a,b]$. Osoitetaan, että funktiolla f on antiderivaatta välillä $[a,b]$. Muodostetaan funktio

$$H(t) = G(t) + Kt.$$

Koska oletuksen perusteella $G'(t) = g(t)$, niin

$$H'(t) = G'(t) + K = g(t) + K = f(t).$$

Siis funktiolla f on antiderivaatta H. Koska funktio on rajoitettu, niin antiderivaatta H on Lipschitzin funktio siten, että $H'(t) = f(t)$ kaikilla pisteillä $a \leq t \leq b$, joissa funktio f on jatkuva. $\square$

Lause 2.4. *Oletetaan, että funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Tällöin funktio f on Newton-integroituva kaikilla välin $[a,b]$ suljetuilla osaväleillä.*

Todistus. Jos funktio f on jatkuva, niin sen Newton-integroituvuus seuraa lauseesta 2.3. $\square$

2.4 Newtonin integraalin variaatiot

Tässä luvussa esitellään Newtonin integraalin erilaisia variaatioita. Luvussa 2.1 esitetty määritelmä Newtonin integraalille on hyvin vaativa, koska ehdon $F'(x) = f(x)$ on oltava voimassa kaikissa välin $[a,b]$ pisteissä. Usein on kuitenkin hyödyllistä sallia funktiolle f poikkeuksia, kuten pieniä pistejoukkoja, joissa funktio ei ole määritelty tai pisteitä, joissa $F'(x) = f(x)$ ei ole voimassa.

Ennen variaatioiden esittämistä määritellään *numeroituvan joukon* käsite (ks. [1, s. 39]).

Joukko S on *äärettömästi numeroituva*, jos se on yhtä mahtava kaikkien positiivisten kokonaislukujen kanssa. Tällöin voidaan merkitä

$$S \sim \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Määritelmä 2.5. (Ks. [1, s. 39, Määritelmä 2.15].) Joukko S on *numeroituva*, jos se on äärellinen tai äärettömästi numeroituva joukko. Jos joukko ei ole numeroituva, niin sitä sanotaan *ylinumeroituvaksi*.

Kun tehdään funktiolle F joitakin väljennyksiä, niin saadaan seuraavanlaisia variaatioita Newtonin integraalille (ks. [4, s. 33]). Lisäksi jokaisessa seuraavassa tapauksessa funktion f ollessa integroituva kyseisellä tavalla voidaan kirjoittaa

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Klassinen. Funktio f on määritelty välillä $[a,b]$ ja $F'(x) = f(x)$ jokaisessa välin $[a,b]$ pisteessä.

Naiivi. Funktio f on määritelty vähintään välillä (a,b), F on jatkuva välillä $[a,b]$ ja $F'(x) = f(x)$ jokaisessa välin (a,b) pisteessä.

Elementaarinen. Funktio f on määritelty vähintään välillä (a, b) paitsi mahdollisesti äärellisen monessa pisteessä. Funktio F on jatkuva välillä (a, b) ja $F'(x) = f(x)$ jokaisessa välin (a, b) pisteessä lukuun ottamatta äärellisessä määrässä välin (a, b) pisteitä.

Muunneltu. Funktio f on määritelty vähintään välillä (a, b) paitsi mahdollisesti numeroituvassa joukossa N. Funktio F on jatkuva välillä $[a, b]$ ja $F'(x) = f(x)$ jokaisessa välin (a, b) pisteessä paitsi mahdollisen joukon N pisteissä.

Klassisella tavalla Newton-integroituva funktio on oltava määritelty jokaisessa pisteessä välillä $[a, b]$. Käydään läpi esimerkki tällaisesta funktiosta.

Esimerkki 2.4. Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = x^2,$$

joka on määritelty millä tahansa välillä $[a, b]$. Tällöin funktio on Newton-integroituva klassisesti, koska funktiolle f on olemassa antiderivaatta $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ siten, että $F'(x) = f(x)$ millä tahansa välillä $[a, b]$.

Esimerkin 2.4 funktio on myös Newton-integroituva naiivisti välillä (a, b). Klassisen ja naiivin version ero on pieni, sillä versiot eroavat toisistaan niiden määrittelyväleillä siten, että ehto $F'(x) = f(x)$ on voimassa klassisessa versiossa välin $[a, b]$ pisteissä ja naiivissa versiossa välin (a, b) pisteissä. Kumpikaan versioista ei salli määrittelyvälillä poikkeuksia vaan funktioiden tulee olla määritelty jokaisessa välin pisteessä. Naiivissa versiossa funktio on määritelty avoimella välillä, joka mahdollistaa sen, että jotkut funktiot ovat naiivisti Newton-integroituvia, mutta eivät klassisesti Newton-integroituvia. Käydään seuraavaksi esimerkki läpi tällaisesta funktiosta.

Esimerkki 2.5. Olkoon funktio

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Tarkastellaan erikseen väliä $[0, 1]$. Tällöin funktio on Newton-integroituva naiivisti, koska funktio $F(x) = 2\sqrt{x}$ on jatkuva välillä $[0, 1]$ ja ehto $F'(x) = f(x)$ on voimassa jokaisessa välin $(0, 1)$ pisteessä. Funktio ei kuitenkaan ole Newton-integroituva klassisesti, koska funktio f ei ole määritelty pisteessä 0 eikä täten ehto $F'(x) = f(x)$ ole voimassa jokaisessa välin $[0, 1]$ pisteessä.

Elementaarisen ja naiivin version ero on merkittävämpi, koska elementaarisessa versiossa ehdon $F'(x) = f(x)$ ei tarvitse olla voimassa jokaisessa välin (a, b) pisteessä. Käydään läpi tällaisesta funktiosta esimerkki.

Esimerkki 2.6. Olkoon funktio

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}.$$

Tarkastellaan erikseen väliä $[-1, 1]$. Funktio ei ole tällöin Newton-integroituva naiivisti (eikä klassisesti), koska funktio f ei ole määritelty pisteessä 0 eikä tällöin ehto $F'(x) = f(x)$ ole voimassa jokaisessa välin $(-1, 1)$ pisteessä. Funktio on Newton-integroituva elementaarisesti, koska versio sallii äärellisen määrän pisteitä, joissa se ei ole määritelty. Tällöin funktio

$$F(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & \text{kun x>0,} \\ -2\sqrt{x}, & \text{kun x<0,} \end{cases}$$

on jatkuva välillä $(-1, 1)$ ja ehto $F'(x) = f(x)$ on voimassa jokaisessa välin $(-1, 1)$ pisteessä lukuun ottamatta pistettä 0.

Elementaarisen ja muunnellun version eroa tarkastellaan tarkemmin seuraavan esimerkin avulla.

Esimerkki 2.7. Osoitetaan, että popcorn funktio

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{jos } x \text{ on rationaalinen ja } x = \frac{p}{q} \text{ supistetussa muodossa,} \\ 1, & \text{jos } x \text{ on rationaalinen ja } x = \frac{p}{q}, \text{ kun } q = 0, \\ 0, & \text{jos } x \text{ on irrationaalinen,} \end{cases}$$

on välillä $[0, 1]$ Newton-integroituva muunnellusti, mutta ei elementaarisesti.

Todistus. (Vrt. [4, s. 328, Harjoitus 31].) Olkoon funktio $F\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ mikä tahansa vakiofunktio. Tällöin sen derivaatta on $F'(x) = 0$. Koska funktio $P(x) = 0$ kaikilla irrationaaliluvuilla x, niin sen antiderivaatta on funktio F, joka toteuttaa ehdon

$$F'(x) = 0 = P(x)$$

kaikilla irrationaaliluvuilla $x \in [0, 1]$.

Jos valitaan mikä tahansa rationaaliluku $x \in [0, 1]$, niin ehto

$$F'(x) = 0 \neq \frac{1}{q} = P(x), \quad (\text{kun } q \neq 0)$$

ei ole voimassa ja funktiolla $P(x)$ ei ole antiderivaattaa F, joka toteuttaisi vaaditun ehdon. Tällöin kaikki rationaaliluvut muodostavat numeroituvan joukon Q, joka sisältää äärettömän määrän rationaalilukuja. Popcorn funktio on Newton-integroituva muunnellusti, koska funktiolla $P(x)$ on antiderivaatta F, joka on jatkuva välillä $[0, 1]$ ja ehto $F'(x) = P(x)$ on voimassa jokaisessa välin $(0,1)$ pisteessä paitsi numeroituvassa joukossa Q. Popcorn funktio ei ole Newton-integroituva elementaarisesti, koska ehto $F'(x) = P(x)$ vaatii äärettömän määrän pisteitä välillä $(0,1)$, jotta se olisi voimassa.

$\square$

Esitellään vielä yksi variaatio Newtonin integraalista, joka on kontrolloitu Newtonin integraali. Tarkastellaan ennen version määrittämistä naiivia versiota, jota soveltamalla saadaan Newtonin integraalin kontrolloitu versio. Olkoon funktio $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ naiivisti Newton-integroituva. Tällöin on olemassa jatkuva funktio $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ siten, että

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(x)$$

eli

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x) - f(x)(y - x)}{y - x} = 0,$$

kaikilla $x \in (a,b)$. Tällöin integraalin arvo on

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

Esitellään seuraavaksi Newtonin integraalin kontrolloitu versio (ks. [4, s. 36]).

Määritelmä 2.6. Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ sanotaan olevan *kontrolloidusti Newton-integroituva*, mikäli on olemassa jatkuva funktio $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ja aidosti kasvava funktio $\phi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, jota sanotaan *kontrolliksi*, kun jokaisella $x \in (a,b)$ on voimassa raja-arvo

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x) - f(x)(y - x)}{\phi(y) - \phi(x)} = 0.$$

Tällöin integraalin arvoa voidaan merkitä

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

Kontrolloidun Newtonin integraalin versiota voidaan pitää yhtenä vaihtoehtona Newtonin integraalille. Version hyvänä puolena on se, että sen olemassaolo ei vaadi funktion olevan derivoituva. Kontrolloidun Newtonin integraalin määritelmää hyödynnetään luvussa 4.2, koska se on ekvivalentti luvussa 4.1 esitettävän Henstock-Kurzweilin integraalin kanssa.

Määritellään seuraavaksi *tasaisesti suppenevan jonon* käsite, jota tarvitaan tarkasteltaessa Newton-integroituvien funktioiden yleisiä ominaisuuksia.

Määritelmä 2.7. (Ks. [1, s. 221 Määritelmä 9.1].) Funktioiden jonon $\{f_n\}$ sanotaan *suppenevan tasaisesti* kohti funktiota f, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa jokin N (riippuen ainoastaan ε) siten, että $n > N$ edellyttäen

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

kaikilla $x \in S$. Tällöin merkitään

$$f_n \to f \text{ tasaisesti joukossa } S.$$

Esitellään seuraavaksi Newton-integroituvien funktioiden kolme ominaisuutta (ks. [4, s. 39]).

Monotonisuus. Jos $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ovat integroituvia ja $f(x) \leq g(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$, niin

$$\int_a^b f(t)\ dt \leq \int_a^b g(t)\ dt.$$

Lineaarisuus. Jos $f_1, f_2, \ldots, f_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ovat integroituvia ja

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)$$

on näiden funktioiden lineaarinen kombinaatio, niin h on vastaavassa mielessä integroituva ja

$$\int_a^b h(x)\ dx = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\int_a^b f_i(x)\ dx \right).$$

Jatkuvuus. Jos $f_1, f_2, \ldots$ ovat integroituvien funktioiden tasaisesti suppeneva jono välillä $[a, b]$ ja $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, niin funktio f on vastaavassa mielessä integroituva ja

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx.$$

Todistus. Sivuutetaan, ks. [4, s. 329-332, Harjoitukset 38-40]. □

3 Riemannin integraali

Bernhard Riemann (1826-1866) oli saksalainen matemaatikko ja fyysikko. Hänen merkitystään erityisesti osoittavat Riemannin geometria, Riemannin pinnat, Riemannin summa sekä Riemannin integraali. Hän erotti integroinnin derivoinnista ja lähestyi sitä summan avulla. Useat muut matemaatikot ovat jatkaneet hänen tutkimuksiaan, joista on syntynyt useita erilaisia integraaliteorioita. Lisäksi hän käsitteli fysiikkaa, lukuteoriaa, geometriaa ja funktioteoriaa laajoina kokonaisuuksina antamatta pienten yksityiskohtien rajoittaa ajatuksiensa liikkuvuutta. Hänen vahvuuksinaan voitiin pitää kykyä nähdä asioita uusilta näkökulmilta sekä käyttää erilaisia menetelmiä tutkimuksissaan. (Ks. [3, s. 116-117])

3.1 Riemannin summa

Luvussa 2.1 määritelty Newtonin integraali edellyttää antiderivaatan F olemassaolon. Tässä luvussa esitellään menetelmä, jolla integraalin arvo kytketään funktion f varsinaiseen arvoon. Tähän päästään, kun tarkastellaan Newtonin integraalin ja Riemannin summan yhteyttä (ks. [4. s. 9-15]).

Määritellään seuraavaksi Riemannin summan käsite.

Määritelmä 3.1. (Ks. [2, s. 11, Määritelmä 2.1].) Olkoon väli $[a, b] \in \mathbb{R}$ ja funktio $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Olkoon välin $[a, b]$ jako $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ siten, että $x_0 = a$, $x_n = b$ ja $x_{i-1} < x_i$, kun $i = 1, 2, \ldots, n$. Olkoon lisäksi $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$. Tällöin summaa

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

välillä $[a, b]$ sanotaan funktion f *Riemannin summaksi.*

Väliarvolauseen avulla Newtonin integraali voidaan esittää Riemannin summana. Jos funktio $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on derivoituva jokaisessa välin $[a, b]$ pisteessä, niin tällöin $F' = f$ on Newton-integroituva ja väliarvolausetta voidaan soveltaa lausumalla integraali muodossa

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = f(\xi)(b - a)$$

jollain $\xi \in (a, b)$. Tällöin integraalin arvo on ilmaistu yksinkertaisimpana Riemannin summana ja pisteet ovat $x_0 = a$ ja $x_1 = b$.

Jos valitaan kolme erillistä pistettä

$$a = x_0, x_1, x_2 = b,$$

niin saadaan

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \big[F(b) - F(x_1)\big] + \big[F(x_1) - F(a)\big]$$

$$
\begin{aligned}
&= f(\xi_2)(b - x_1) + f(\xi_1)(x_1 - a) \\
&= \sum_{i=1}^{2} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})
\end{aligned}
$$

jollain pisteillä $\xi_1 \in (a, x_1)$ ja $\xi_2 \in (x_1, b)$.

Integraalin arvo voidaan laskea Riemannin summan avulla myös äärellisellä määrällä pisteitä, jolloin määritelmää 3.1 voidaan laajentaa määrittelemällä jaon käsite uudella tavalla. Tällöin valitaan välin $[a, b]$ mikä tahansa kokoelma pisteitä siten, että

$$
a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b
$$

on järjestettynä johonkin järjestykseen (ei välttämättä kasvavaan). Valitaan jokin tietty piste $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, kun $i = 1, 2, \ldots, n$ siten, että

$$
\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \big[F(x_i) - F(x_{i-1})\big] = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).
$$

Nyt on osoitettu Newtonin integraalin ja Riemannin summan yhteys, jota vielä tarkastellaan seuraavan esimerkkin avulla.

Esimerkki 3.1. (Ks. [1, s. 320, Harjoitus 4].) Osoitetaan, että integraalin $\int_a^b x\, dx$ tarkka arvo voidaan laskea Riemannin summan avulla, kun

$$
\int_a^b x\, dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i + x_{i-1}}{2}(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_{i-1}^2).
$$

Todistus. Olkoon

$$
\frac{x_i + x_{i-1}}{2} = \xi_i.
$$

Tällöin Riemannin summa antaa välin $[a, b]$ mielivaltaisella jaolla

$$
a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b
$$

summan arvoksi

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i + x_{i-1}}{2}(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_{i-1}^2) &= \frac{1}{2}[b^2 - x_{n-1}^2 + x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2 + \cdots - a^2] \\
&= \frac{b^2 - a^2}{2}.
\end{aligned}
$$

Sama arvo saadaan käyttämällä funktion $f(x)$ antiderivaattaa $F(x) = \frac{1}{2}x^2$. Tällöin integraalin arvoksi saadaan

$$\int_a^b x\,dx = F(b) - F(a) = \frac{b^2 - a^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 - x_{i-1}^2}{2}.$$

Tällöin on osoitettu, että Newtonin integraalin ja Riemannin summan arvot ovat samat funktiolla $f(x) = x$. $\square$

Newtonin integraalin laskeminen Riemannin summan avulla on mahdollista, jos pystytään valitsemaan jokin oikea piste ξ_i, joka tekee arvosta tarkan. Teoriassa väliarvolauseen avulla saadaan tällainen piste, mutta käytännössä tällöinkään ei ole aina mahdollista löytää konkreettisesti sellaista pistettä, joka antaa riittävän tarkan arvon. Tarkastellaan tilannetta olettamalla funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ olevan derivoituva ja joukon

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

olevan välin $[a,b]$ jako. Tällöin jokaiselta osaväliltä $[x_{i-1}, x_i]$ etsitään sellainen piste ξ_i, että termi

$$f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

antaa tarkan arvon termille

$$F(x_i) - F(x_{i-1}).$$

Jos pisteiden valinta on mahdollinen jokaisessa osavälissä, niin Riemannin summa

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

antaa halutun arvon välille $[a,b]$, sillä

$$\sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a).$$

Tarkan arvon sijaan on hyödyllisempää käyttää seuraavanlaista approksimaatiota (ks. [4, s. 14-15]) tuloksen arvioimisessa

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Tämän lähtökohtana on sallia mielivaltainen määrä pisteitä ξ_i, joilla approsimaatio antaa riittävän hyvän likiarvon. Kuitenkin aina on mahdollista löytää sellainen piste ξ_i, joka tekee tuloksesta liian virheellisen. Virhettä voidaan kontrolloida valitsemalla välin $[x_i, x_{i-1}]$ pisteet riittävän lähelle toisiaan. Yksi menetelmä valita pisteet on käyttää *tasaista approksimaatiota*. Menetelmässä valitaan jonkin yksittäisen pienen luvun δ pienuus ja pisteet x_i ja x_{i-1} siten, että

$$|x_i - x_{i-1}| < \delta$$

kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$. Lisäksi jokainen termi voi lisätä virhettä, joten valittua jonoa

$$a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$$

pitää rajoittaa siten, että kokonaisvirhe ei muodostu liian suureksi. Helpoin tapa tämän toteuttamiseksi on olettaa pisteiden olevan kasvavassa järjestyksessä

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Toinen tapa on rajata pistejonon variaation kokoa rajaamalla summan

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}|$$

kokoa. Näistä tavoista ensimmäistä käytetään Cauchyn lauseessa ja toista tapaa myös Robbinsin lauseessa. Augustin Lousin Cauchy (1789-1857) oli ranskalainen matemaatikko, joka antoi ensimmäisenä hyvin täsmällisiä todistuksia analyysin tuloksille. Hän julkaisi vuonna 1821 teoksen, joka esitti differentiaali- ja integraalilaskennan peruskäsitteinä olevien raja-arvon ja jatkuvuuden määritelmät samassa muodossa kuin ne nykyäänkin esitetään. Hän pystyi todistamaan, että differentiaali- ja integraalilaskenta lepäävät täsmällisellä pohjalla. Tämä oli käänteentekevää, sillä Newtonin ajoista alkaen elettiin sellaisessa käsityksessä, että ne antavat vain likimääräisiä tuloksia. (Ks. [3, s. 92]) Cauchy tutki erityisesti jatkuvia funktioita ja oli ensimmäinen, joka tarkasteli jatkuvien funktioiden integroituvuutta. Esitellään seuraavaksi Cauchyn lause (ks. [4, s. 16]).

Lause 3.1. *Olkoon funktio $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin funktio f on Newton-integroituva välillä $[a, b]$ ja integraalilla on tasainen approksimaatio Riemannin summan avulla, eli jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa jokin $\delta > 0$ siten, että*

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

ja

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

aina, kun

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

on sellainen välin $[a, b]$ *jako, että*

$$x_i - x_{i-1} < \delta,$$

ja

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Todistus. Sivuutetaan, ks. [4, s. 321, Harjoitus 11]. □

Esitellään seuraavaksi Robbinsin lause, joka on toinen mahdollinen versio Cauchyn lauseelle. Robbinsin lausetta voidaan pitää teknisesti parempana versiona Riemannin summan ilmaisemisessa jatkuville integroituville funktioille. Merkittävin ero lauseiden välillä on se, että Cauchyn lauseessa jaon pisteet $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ ovat kasvavassa järjestyksessä. Kun taas Robbinsin lauseessa Riemannin summan pisteet ovat mielivaltaisessa järjestyksessä eikä funktion tarvitse tällöin välttämättä olla jatkuva, ja tämän vuoksi Robbinsin lause sallii Newtonin integraalin luonnehdinnan jatkuville funktioille täysin Riemannin summan avulla. Esitellään seuraavaksi Robbinsin lause (ks. [4, s. 17]).

Lause 3.2. *Reaaliarvoinen funktio* f *on jatkuva välillä* $[a, b]$*, jos ja vain jos on olemassa luku* I *siten, että jokaista* $\varepsilon > 0$ *ja* $C > 0$ *kohti on olemassa jokin* $\delta > 0$ *siten, että*

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

millä tahansa pisteiden $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *ja* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *valinnalla, jotka noudattaa ehtoa*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| \leq C,$$

missä $a = x_0$, $b = x_n$, $0 < |x_i - x_{i-1}| < \delta$ *ja jokainen* ξ_i *kuuluu päätepisteiden* x_{i-1} *ja* x_i *väliin, kun* $i = 1, 2, \ldots, n$*. Tällöin funktio* f *on Newton-integroituva välillä* $[a, b]$ *ja*

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Todistus. Sivuutetaan, ks. [4, s. 17-21, Todistus 1.9]. □

Lause 3.2 antaa Newtonin integraalin jatkuville funktioille kaksi ekvivalenttia muotoa, joko käyttämällä antiderivaattaa tai Riemannin summaa integraalin tarkastelussa.

3.2 Riemannin integraali

Esitellään seuraavaksi Riemannin integraalin määritelmä (ks. [4, s. 44]).

Määritelmä 3.2. Olkoon funktio f määritelty jokaisessa välin $[a, b]$ pisteessä. Tällöin funktio f on *Riemann-integroituva* välillä $[a, b]$, jos seuraava kriteeri on voimassa: on olemassa luku I siten, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa jokin $\delta > 0$ siten, että

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

aina, kun

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

on sellainen välin $[a, b]$ jako, että

$$x_i - x_{i-1} < \delta,$$

ja

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Määritelmässä 3.2 luku I voidaan myös ilmoittaa muodossa

$$I = (R) \int_a^b f(x)\, dx.$$

Riemannin integraali on yhteensopiva useiden Newtonin integraalin variaatioiden kanssa, mutta integraalin yhteys ei ole yksiselitteinen. Luvussa 2 todettiin, että kaikki jatkuvat funktiot ovat Newton-integroituvia ja sama pätee myös Riemannin integraalille. Riemannin integraali määritellään rajoitetuille funktioille $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$; jos ehto ei ole voimassa joudutaan tarkastelemaan epäoleellisia integraaleja. Kaikki jatkuvat funktiot ovat Riemann-integroituvia sekä Newton-integroituvia. Kaikki Riemann-integroituvat funktiot eivät ole Newton-integroituvia. Esimerkiksi seuraavan harjoitustehtävän funktio ei ole Riemann-integroituva.

Harjoitus 3.1. Dirichlet'n funktio $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, joka määritellään seuraavasti

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \text{ on rationaalinen,} \\ 0, & \text{jos } x \text{ on irrationaalinen,} \end{cases}$$

ei ole Riemann-integroituva.

4 Henstock-Kurzweilin integraali

Tässä luvussa tarkastellaan Henstock-Kurzweilin integraalia, joka ei ole yhtä tunnettu integraali kuin Newtonin ja Riemannin integraalit. Henstock-Kurzweilin integraali on historiallisesti tunnettu lukuisista nimistään riippuen määritelmän luonteesta ja kehittäjästä. Integraalia on kutsuttu mm. Denjoyn rajoitetuksi integraaliksi, Perronin integraaliksi, Denjoy-Perronin integraaliksi, ja Kurzweilin integraaliksi (ks. [4, s. 121]). Henstock-Kurzweilin integraalin monipuolisuudesta seuraa, että se kattaa edellisessä luvussa esille tulleen Newtonin integraalin eri variaatiot. Tätä seikkaa tarkastellaan tarkemmin vielä myöhemmin.

4.1 Henstock-Kurzweilin integraali

Tässä luvussa esitellään Henstock-Kurzweilin integraali, joka yleistää Riemannin integraalin määritelmää. Riemannin integraalin heikkoutena on se, ettei välttämättä ole olemassa yhtä positiivista vakiota δ, joka toteuttaa määritelmän 3.2 kaikilla välin $[a, b]$ pisteillä. Riemannin integraalissa ei oteta huomioon funktion integroituvuuden paikallista käyttäytymistä eikä tämän vuoksi funktio f ole välttämättä Riemann-integroituva. Kun tarkastellaan positiivisen vakion δ korvaamista positiivisella funktiolla $\delta(\xi)$, niin jokaista $\xi \in [a, b]$ kohti on olemassa jokin $\delta(\xi) > 0$ siten, että määritelmä 3.2 toteutuu. Tällöin saadaan Henstock-Kurzweilin integraali, jossa Riemannin integraalin määritelmän vakio δ korvataan positiivisella funktiolla $\delta(\xi) > 0$. Esitellään seuraavaksi Henstock-Kurzweilin integraalin määritelmä (ks. [4, s. 51]).

Määritelmä 4.1. Olkoon funktio f määritelty jokaisessa suljetun välin $[a, b]$ pisteessä. Funktio f on *Henstock-Kurzweil-integroituva* välillä $[a, b]$, jos seuraava pisteittäinen määritelty integroituvuuden kriteeri on voimassa: on olemassa luku I siten, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen positiivinen funktio $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}_+$, että

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

aina, kun

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b,$$

on sellainen välin $[a, b]$ jako, että

$$x_i - x_{i-1} < \delta(\xi_i),$$

ja

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Määritelmästä 4.1 seuraa, että Henstock-Kurzweilin integraali sisältää sekä Newtonin integraalin että Riemannin integraalin. Määritelmässä 4.1 funktio f on määritelty jokaisessa välin $[a, b]$ pisteessä. Yleensä ei vaadita funktiolle näin ankaria ehtoja, kuten luvussa 2 funktion ehtoja lievennettiin tarkasteltaessa erilaisia variaatioita Newtonin integraalille. Määritelmässä 4.1 voidaan myös sopia funktion olevan määritelty melkein kaikkialla (ks. [4, s. 90-91]) välin (a, b) pisteissä ilman, että se muuttaisi integraalin käsitettä. Tällöin sovitaan, että funktio g on määritelty siten, että $g(x) = f(x)$, kun funktio on määritelty ja muulloin $g(x) = 0$.

Esitellään seuraavaksi lause Cauchyn kriteeristä (ks. [4, s. 52]). Merkintä $\lambda(I)$ tarkoittaa välin I pituutta, ja jos väli I on yksittäinen piste tai tyhjä, niin $\lambda(I)$ on nolla.

Lause 4.1. *Välttämätön ja riittävä edellytys funktiolle $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, jotta se on Henstock-Kurzweil-integroituva välillä $[a, b]$, on se että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa jokin positiivinen funktio $\delta\colon [a, b] \to \mathbb{R}_+$ siten, että*

$$\left| \sum_{(I,w)\in\pi} \sum_{(I',w')\in\pi'} [f(w) - f(w')]\lambda(I \cap I') \right| < \varepsilon$$

kaikilla välin $[a, b]$ jaoilla π, π', jotka ovat hienompia kuin δ.

Todistus. Sivuutetaan, ks. [4, s. 52, Lause 1.24]. □

Esitellään seuraavaksi hyödyllinen Henstock-Saksin lause (ks. [4, s. 53]), joka koskee funktion f ja sen antiderivaatan F yhteyttä. Lausetta voidaan pitää yleistyksenä Newtonin integraalin klassiselle versiolle funktion f ja sen antiderivaatan yhteydestä, jossa ehto $F'(x) = f(x)$ on voimassa kaikilla välin $[a, b]$ pisteillä.

Lause 4.2. *Olkoon funktio f Henstock-Kurzweil-integroituva ja määritelty jokaisessa suljetun välin $[a, b]$ pisteessä. Tällöin f on Henstock-Kurzweil-integroituva jokaisella suljetulla osavälillä $[a, b]$. Lisäksi jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen positiivinen funktio $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}_+$, että*

$$\sum_{([u,v],w)\in\pi} |F(v) - F(u) - f(w)(v - u)| < \varepsilon,$$

milloin tahansa π on välin $[a, b]$ hienompi jako kuin δ. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

on funktion f antiderivaatta.

Todistus. Sivuutetaan, ks. [4, s. 53, Lause 1.25]. □

4.2 Kontrolloitu Newtonin integraali ja Henstock-Kurzweilin integraali

Tässä luvussa tarkastellaan Henstock-Kurzweilin integraalin ja luvussa 2 esitetyn Newtonin integraalin yhteyttä tarkemmin. Henstock-Kurzweilin integraali sisältää luvussa 2.3 esitetyt Newtonin integraalin variaatiot, kuten luvussa 4.1 todettiin, että funktion voidaan sopia olevan määritelty melkein kaikialla välin pisteillä ilman, että se vaikuttaa integraalin määritelmään. Lisäksi Henstock-Kurzweilin integraali on ekvivalentti Newtonin integraalin kontrolloidun version kanssa. Tarkastellaan Henstock-Kurzweilin integraalin ja kontrolloidun Newtonin integraalin yhteyttä seuraavan lauseen avulla.

Lause 4.3. *Funktio f on kontrolloidusti Newton-integroituva, jos ja vain jos se on Henstock-Kurzweil-integroituva.*

Todistus. [4, s. 57-58, Lause 1.26] Todistetaan ensin, että jos funktio f on kontrolloidusti Newton-integroituva, niin funktio on Henstock-Kurzweil-integroituva. Olkoon funktio Newton-integroituva kontrolloidusti. Tällöin määritelmän 2.6 nojalla on voimassa seuraavat oletukset: funktio $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, jatkuva funktio $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ja kontrolli funktio $\phi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Kiinnitetään väli $[c,d] \subset (a,b)$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Merkitään

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\phi(d) - \phi(c)}.$$

Jokaista $x \in (a,b)$ kohti on olemassa jokin $\delta(x) > 0$ siten, että

$$\left| \frac{F(y) - F(x) - f(x)(y-x)}{\phi(y) - \phi(x)} \right| < \eta,$$

jos $0 < |y - x| < \delta(x)$. Tällöin lauseen funktio f on Henstock-Kurzweil-integroituva välillä $[c,d]$ ja voidaan kirjoittaa

$$\int_c^d f(x)\,dx = F(d) - F(c).$$

Oletetaan, että jako $\pi = \{([u,v],w)\}$ on äärellinen. Jos $\pi = \{([u,v],w)\}$ on välin $[c,d]$ hienompi jako kuin δ, niin saadaan

$$\left| F(d) - F(c) - \sum_{([u,v],w)\in\pi} f(w)(v-u) \right| \leq \sum_{([u,v],w)\in\pi} \left| F(v) - F(u) - f(w)(v-u) \right|$$

$$\leq \sum_{([u,v],w)\in\pi} \eta[\phi(v)-\phi(u)] = \eta[\phi(d)-\phi(c)] = \varepsilon.$$

Tällöin f on Henstock-Kurzweil-integroituva välillä $[c,d]$ ja funktio F on sen antiderivaatta. Funktio F on jatkuva välillä $[a,b]$, niin laajennus välille $[a,b]$ seuraa Cauchyn ominaisuudesta (ks. [4, s. 60]).

Todistetaan seuraavaksi, että jos funktio f on Henstock-Kurzweil-integroituva, niin funktio on kontrolloidusti Newton-integroituva. Oletetaan, että $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on Henstock-Kurzweil-integroituva välillä $[a,b]$ ja olkoon sen antiderivaatta funktio F. Tällöin funktio F on jatkuva. Muodostetaan sopiva kontrolloitu funktio määritelmän 2.6 mukaisesti. Valitaan lauseen 4.2 nojalla sellainen vähenevä jono positiivisia funktioita $\delta_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$, että

$$\sum_{([u,v],w)\in\pi} |F(v)-F(u)-f(w)(v-u)| < 2^{-n},$$

missä π on välin $[a,b]$ hienompi jako kuin δ_n.
Olkoon jokaista kokonaislukua $n = 1,2,3,\ldots$ kohti olemassa sellainen funktio $G_n(x)$, joka on määritelty jokaisessa pisteessä $a < x < b$. Vaaditaan lisäksi, että funktio $G_n(x)$ on summien supremum

$$\sum_{([u,v],w)\in\pi} |F(v)-F(u)-f(w)(v-u)|$$

kaikkilla välin $[a,x]$ jaoilla π, jotka ovat hienompia kuin δ_n. Tällöin funktio $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on kasvava, $G_n(a) = 0$ ja $G_n(b) < 2^{-n}$. Nyt millä tahansa positiivisella kokonailuvulla n ja kaikilla $k = 1,2,3\ldots,n$, jos $0 < y-x < \delta_n(x)$, niin jako $([x,y],x)$ on hienompi kuin δ_k. Siten

$$G_k(y) - G_k(x) \geq |F(y)-F(x)-f(x)(y-x)|.$$

Vastaavasti jos $0 < x-y < \delta_n(x)$, niin jako $([y,x],x)$ on hienompi kuin δ_k ja siten

$$G_k(x) - G_k(y) \geq |F(x)-F(y)-f(x)(x-y)|.$$

Nyt voidaan määrittää kontrolloitu funktio seuraavasti

$$\phi(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x).$$

Tällöin summa on äärellinen ja funktio on aidosti kasvava välillä (a,b).
Jos $0 < y-x < \delta_n(x)$, niin

$$\phi(y) - \phi(x) \geq n|F(y)-F(x)-f(x)(y-x)|$$

ja jos $0 < x - y < \delta_n(x)$, niin

$$\phi(x) - \phi(y) \geq n|F(x) - F(y) - f(x)(x - y)|.$$

Täten jokaista $x \in (a, b)$ kohti on olemassa raja-arvo

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x) - f(x)(y - x)}{\phi(y) - \phi(x)} = 0.$$

Tällöin lause on osoitettu päteväksi, koska on löydetty vaadittu kontrolli funktio. $\square$

Viitteet

[1] Apostol Tom M., *Mathematical Analysis.* California Institute of Technology, Second Edition, 1981.

[2] Douglas Kurtz S., Charles Swartz W., *Theories of Integration.* Volume 9, New Mexico State University, 2004.

[3] Korhonen Hannu, *Matematiikan historian henkilöhahmoja.* 1. painos, MFKA-kustannus Oy, 1995.

[4] Thomson Brian S., *Theory of the integral.* Simon Fraser University, 2012. URL: [http://classicalrealanalysis.info/documents/toti-runme.pdf]. Viitattu 23.10.2012.

[5] Thomson Brian S., Bruckner Judith B., Bruckner Andrew M., *Real Analysis.* Second Edition, 2008.
URL: [http://classicalrealanalysis.info/documents/BBT-AlllChapters-Landscape.pdf]. Viitattu 10.9.2012.